数理解析研究所講究録
22巻 1967年 45-52

Boltzmann 及び Schrödinger 作用素の固有値問題

京大 理学部 内山 淳

次のような形の積分作用素のスペクトルを調べよう。

(1) $(Hf)(x) = V(x)\cdot f(x) + \int_\Omega K(x,y)f(y)dy \equiv (Vf)(x) + (Kf)(x)$

ここで次の仮定を置こう。

仮定 1 $V(x)$ は実数値函数で，かつ $V(x) \in C^0(\Omega)$ である。さらに $L^2(\Omega)$ における乗法作用素 V の domain を，$\mathcal{D}(V) = \{f \in L^2(\Omega),\ V(x)f(x) \in L^2(\Omega)\}$ とする。（Ω は R^m の domain である。）

仮定 2 $\inf_{x\in\Omega} V(x) = 0$

仮定 3 $\mathcal{D}(K) = \mathcal{D}(V)$ とすると，K は $L^2(\Omega)$ の対称作用素である。

仮定 4 集合 $\{x \in \Omega : V(x) = 0\}$ の Lebesgue measure は 0 である。

仮定 5 $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(V)$ とするとき，H は $L^2(\Omega)$ の自己共役な作用素である。

(1) のような形の作用素で，これらの仮定をみたす作用素は，応用に際して，かなりしばしば現れる，たとえば，linearized Boltzmann operator 及び，Schrödinger 作用素を Fourier 変換して得られる作用素もこの type に属する，また いわゆる Friedrichs model もそうである，この種の作用素の連続スペクトルに関しては，Friedrichs [3] や Faddeev [2] などによって調べられているが，その離散固有値に対しては，系統的に調べたものがないように思われるので，それを少し調べよう。

次の定理は，Birman [1] によって得られたものと，類似であるが，Birman [1] は Hermitian form を用いて述べてあるのを，我々は，作用素を使って調べよう。

定理 1

(2) $$(G_0 f)(x) = \int_\Omega \frac{K(x,y)}{\sqrt{V(x)}\sqrt{V(y)}} f(y)\,dy$$

で定義された作用素 G_0 は，$L^2(\Omega)$ の有界自己共役作用素であるならば，

(3) $S(H; -\infty, 0) = S(G_0; -\infty, -1)$ である。

ただしここで，A を自己共役作用素としたとき，$S(A; a, b) = \dim\{E_A(b-0) - E_A(a)\}L^2(\Omega)$ である。

（証明） $S(G_0; -\infty, -1) = n < +\infty$ とする。すると，

$$\exists\{\varphi_i\}_{i=1,\cdots,n} \subset L^2(\Omega),\quad G_0\varphi_i = \lambda_i\varphi_i,\quad \lambda_i < -1.$$

である。ところで，$V^{\frac{1}{2}}|_{\mathfrak{D}(V)}$ は essentially selfadjoint であるから $V^{\frac{1}{2}} > 0$ より，$V^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}(V)$ は $L^2(\Omega)$ で dense である。よって，

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\{f_i\}_{i=1,\cdots,n} \subset \mathfrak{D}(V),\quad \|V^{\frac{1}{2}}f_i - \varphi_i\| < \varepsilon,$$

が成り立つ。すると，

$$|((G_0 + I)V^{\frac{1}{2}}f_i,\ V^{\frac{1}{2}}f_j) - ((G_0 + I)\varphi_i,\ \varphi_j)|$$
$$\leq (\|G_0\| + 1)(2 + \varepsilon)\varepsilon$$

を得る。いま，$f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \in \mathfrak{D}(V)$，$\sum_{i=1}^{n}|a_i| \neq 0$ とおくと，$G_0 \supset V^{-\frac{1}{2}}KV^{-\frac{1}{2}}$ で $\mathfrak{D}(V^{-\frac{1}{2}}KV^{-\frac{1}{2}}) = V^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D}(V)$ であるから，

$$(Hf, f) = (Vf, f) + (Kf, f) = ((G_0 + I)V^{\frac{1}{2}}f,\ V^{\frac{1}{2}}f)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\{\lambda_i + 1 + (n+1)(\|G_0\| + 1)(2+\varepsilon)\varepsilon\}$$

を得る。よって，$\lambda_i + 1 + (n+1)(\|G_0\| + 1)(2+\varepsilon)\varepsilon < 0$ となるように

ε を十分小さくとれば，$(Hf, f) < 0$ を得る。よって $S(H; -\infty, 0) \geqq S(G_0; -\infty, -1)$ を得る。今 $S(H; -\infty, 0) > S(G_0; -\infty, -1)$ とすると，

$\exists f_0 \in \mathfrak{D}(V)$, $f_0 \neq 0$, $V^{\frac{1}{2}} f_0 \perp E_{G_0}(-1-0)L^2(\Omega)$, $(Hf_0, f_0) < 0$

を得る。ところで，

$$(Hf_0, f_0) = \|V^{\frac{1}{2}} f_0\|^2 + \int_{-1-0}^{\|G_0\|} \lambda \, d\|E_{G_0}(\lambda) f_0\|^2 \geqq 0$$

であるから矛盾である。よって $S(H; -\infty, 0) = S(G_0; -\infty, -1)$ が示された。$S(G_0; -\infty, -1) = \infty$ のときにも，同様にして，示すことができる。(q.e.d.)

これより，容易に次の系が成り立つことが分かる。

系. 特に G_0 が完全連続作用素ならば，H は下に有界で，$\sigma_e(H) = \sigma_e(V)$ 且，$(-\infty, 0)$ には，H は高々有限個の discrete eigenvalue をもつのみである。

さて，次に，これを用いないで，$S(H; -\infty, 0) = +\infty$ となるための一つの十分条件を与えよう。(但し，$\sigma_e(H) \cap (-\infty, 0) = \phi$ である。) そのために，次の lemma を与えておこう。それは，容易に証明することができる。

lemma. $\omega \subset \Omega$ とする。

(4) $\quad (H_\omega f)(x) = V(x) \cdot f(x) + \int_\omega K(x, y) f(y) dy \qquad (x \in \omega)$

とし，$\mathfrak{D}(H_\omega) = \{ f(x) \in L^2(\omega);\ V(x) f(x) \in L^2(\omega) \}$ とすると，H_ω は $L^2(\omega)$ の自己共役作用素であるとする。すると

(5) $\quad S(H; -\infty, 0) \geqq S(H_\omega; -\infty, 0)$。

この lemma により，H の $(-\infty, 0)$ における discrete eigenvalue の無限個存在することを示すためには，H_ω のそれを示せば十分である。

定理 2. ある点 $x_0 \in \Omega$ と，ある領域 $\omega = \{x : |x - x_0| < r_0$ で，x は $x_0 \in \bar{\Omega}$ を頂点とするある円錐に属する$\} \subset \Omega$ が存在して次の条件が成り立つとする。

(6) $\quad 0 \leq V(x) \leq C\,|x - x_0|^{\nu} \qquad C \geq 0,\ \nu > 0.$

(7) $\quad K(x, y) = M(x, y) + N(x, y), \quad M(x, y) = \overline{M(y, x)},$

$N(x, y) = \overline{N(y, x)}$ で

$$\mathrm{Re}(M(x, y)) \leq -\sum_{i=1}^{N} d_i\,|x - y|^{\beta_i}\,|x - x_0|^{\gamma_i}\,|y - x_0|^{\delta_i}$$

$$\mathrm{Re}(N(x, y)) \leq \mathrm{const}\sum_{i=1}^{N'} |x - y|^{\beta_i'}\,|x - x_0|^{\gamma_i'}\,|y - x_0|^{\delta_i'}$$

が，$|x - x_0| \leq |y - x_0|,\ x, y \in \omega$ で成り立つ。ここで

(8) $\quad \beta_i + \gamma_i + \delta_i = \nu - m, \quad \min\limits_{1 \leq i \leq N'} (\beta_i' + \gamma_i' + \delta_i') = \nu - m + \varepsilon', \ (\varepsilon' > 0).$

(9) $\quad \inf\limits_{g \in W(\tilde{\omega})} \left\{ C\int_{\tilde{\omega}} |x|^{\nu}\,|g(x)|^2\,dx - 2\sum_{i=1}^{N} d_i \int_{\tilde{\omega}}\int_{\tilde{\omega}} |x - y|^{\beta_i}\,|x|^{\gamma_i}\,|y|^{\delta_i}\,g(x)g(y)\,dx\,dy \right\} < 0$

但し，$\tilde{\omega} = \{x : x = x' - x_0,\ x' \in \omega\}$ であり，$|x| \leq |y|$，また

$$W(\tilde{\omega}) = \{g(x) \in L^2(\tilde{\omega})\ ;\ \|g\|_{\tilde{\omega}} \equiv \|g\|_{L^2(\tilde{\omega})} = 1,\ g(x) \geq 0 \ \text{for}\ x \in \tilde{\omega}\}$$

である。また，

(10) $\quad \min\limits_{\mu \in \sigma_e(H_\omega)} \mu = \min\limits_{\mu \in \sigma_e(H)} \mu = 0,$

(11) $\quad K_\omega^{(2)}(x, y) = \int_\omega |K(x, z)\,K(z, y)|\,dz$ は $L^2(\omega)$ の有界作用素の kernel で，

(12) $\quad K_\omega^{(2)}(x, y) \leq \mathrm{const}\sum_{i=1}^{N''} |x - y|^{\beta_i''}\,|x - x_0|^{\gamma_i''}\,|y - x_0|^{\delta_i''}$ for $|x - x_0| \leq |y - x_0|,\ x, y \in \omega$

(13) $\quad \min\limits_{1 \leq i \leq N''} (\beta_i'' + \gamma_i'' + \delta_i'') = \nu - m + \varepsilon'', \ (\varepsilon'' > 0)$

とする。このとき，H は $(-\infty, 0)$ に無限個の discrete eigenvalue をもつ。

(証明) (9)の左辺の $\{\ \}$ の中が負になるような $\tilde{g}_1(x)\in W(\tilde{\omega})$ を一つとってくる。そして、$\tilde{\omega}$ の外では0にしておく。今 $\tilde{g}_l(x)=l^{\frac{m}{2}}g_1(lx)$ とおき、$g_l(x)=\tilde{g}_l(x-a)$ とおくと、(6)〜(9)より

$(H_\omega g_l,\ g_l)_\omega = -k_0 l^{-\nu} + \mathrm{const}\ l^{-\nu-\varepsilon'}$ となる。 $(k_0>0)$

よって、l を十分大きくとれば、$(H_\omega g_l, g_l)<0$ となり、H_ω は $(-\infty,0)$ に少くとも一つ、離散固有値をもつことが分かる。今 H_ω が、$(-\infty,0)$ に p 個の固有値 $\{\lambda_k\}_{k=1,\cdots,p}$ をもち、その正規直交固有函数を、$\{\varphi_k\}_{k=1,\cdots,p}$ とする。いま、

$$v_l(x) = g_l(x) - \sum_{k=1}^{p}\beta_l^{(k)}\varphi_k(x),\quad \beta_l^{(k)}=(g_l,\varphi_k)$$

とおくと、$(v_l,\varphi_k)_\omega=0$ $(k=1,\cdots,p)$ である。ところで、

$$|\lambda_k\beta_l^{(k)}| = |(g_l, H_\omega\varphi_k)_\omega| = |(H_\omega g_l,\varphi_k)| \le |(Vg_l,\varphi_k)_\omega| + |(Kg_l,\varphi_k)_\omega|$$

であるから、(11)〜(13)より、

$$|\beta_l^{(k)}|^2 \le \mathrm{const}\ \|Vg_l\|_\omega^2 + \mathrm{const}\ \|Kg_l\|^2 \le \mathrm{const}\ l^{-2\nu} + \mathrm{const}\ l^{-\nu-\varepsilon''}$$

を得る。よって、

$$(H_\omega v_l, v_l)_\omega = (H_\omega g_l, g_l)_\omega - \sum_{k=1}^{p}\lambda_k|\beta_l^{(k)}|^2 \le -k_0 l^{-\nu} + \mathrm{const}(l^{-2\nu} + l^{-\nu-\varepsilon'} + l^{-\nu-\varepsilon''})$$

となり、l を十分大とすると、$(H_\omega v_l, v_l)_\omega<0$ となるから、(10)より、少くとも $(p+1)$ 個は、離散固有値が $(-\infty,0)$ に存在することがわかる。よって帰納法により、無限個存在することがわかった。 (q.e.d.)

さて、これらの application を考えよう。まず mono-atomic gas model に対する Boltzmann 方程式に関連した、固有値問題は、次の如くなる。

<u>Example 1</u> $\quad V(x) = \sigma\left[\left(x+\frac{1}{2Mx}\right)I(\sqrt{M}x) + \frac{1}{\sqrt{\pi M}}e^{-Mx^2}\right].$

$$K(x,y) = -b\theta^2\left[e^{-\frac{1}{2}(y^2-x^2)}\{I(\theta x-\zeta y)\pm I(\theta x+\zeta y)\}+e^{\frac{1}{2}(y^2-x^2)}\{I(\theta y-\zeta x)\mp I(\theta y+\zeta x)\}\right] \quad (y<x)$$

ここで

$$I(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt,\quad \theta=\frac{M+1}{2\sqrt{M}},\quad \zeta=\frac{M-1}{2\sqrt{M}},\quad b>0,\quad M>0$$

である。すると、

(i) H はその domain を $\mathfrak{D}(H)=\{\varphi : (1+x)\varphi\in L^2(0,\infty)\}$ とするとき、$L^2(0,\infty)$ の自己共役作用素で、

(ii) $\sigma_e(H)=[\mu,\infty)$, $\left(\mu=V(+0)=\frac{2b}{\sqrt{\pi M}}>0\right)$ であり、

(iii) $(-\infty,\mu)$ には、無限個の離散固有値を H はもつ。

実際(i), (ii)は容易に示すことができ、(iii)は、

$$V(x)=\mu+cx^2+O(x^4),\quad 0<x<1,\quad c=\frac{2}{3}b\sqrt{\frac{M}{\pi}},$$

$$K(x,y)=K(y,x)=-\alpha x+O(x(x^2+y^2)),\quad 1\geq y\geq x>0.$$

$$\alpha=\frac{4\theta^2}{\sqrt{\pi}}b(\theta-\zeta)=\frac{(M+1)^2}{M^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}}b$$

が成り立つことより、定理2において、$\check{V}=V-\mu I$ と K は、$x_0=0$, $\omega=(0,1)\subset\Omega=(0,\infty)\subset R^1$, $\nu=2$, $\beta_i=\beta_i'=\beta_i''=\delta_i=0$, $\gamma_i=1$, で条件をみたすことより得られる。Kuščer - Corngold [4] および Urai [5] は上記の結果を示したが、我々のものが数学的には、厳密なように思われる。

<u>Example 2</u> $(L_0 f)(x)=\sum_{k=1}^{3}\left(i\frac{\partial}{\partial x_k}+b_k(x)\right)^2 f(x)+q_0(x)f(x)$

とする。ここで、$b_k(x)\in C^1(R^3)$, $q_0(x)\in L^2_{loc}(R^3)$ は実数値函数で、$b_k(x)$, $\frac{\partial}{\partial x_k}b_k(x)$, $q_0(x)$ は $|x|\to\infty$ のとき、一様に 0 に近づくとする。このとき、

(i) $\mathcal{D}(L_0) = \mathcal{D}_{L^2}(R^3)$ とすると，L_0は$L^2(R^3)$の自己共役作用素である。

(ii) $\sigma_e(L_0) = [0, \infty)$,

(iii)(a) ある $\alpha > 0$ に対して，$\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{3} b_k^2(x) + \frac{1}{1+\alpha} q_0(x) \leq -\frac{c}{|x|^2}$ が $|x| \geq R_0$ で成り立つならば，L_0は$(-\infty, 0)$に無限個の discrete eigenvalue をもつ，

但し　$c > \inf_{g \in W(\omega)} 4\pi \int_\omega |\nabla g(x)|^2 dx \left[\int_\omega\int_\omega \frac{g(x)g(y)}{|x-y|} dx\, dy\right]^{-1}$，$\omega = \{x \in R^3 : |x| < 1\}$

である，

(b) ある $1 > \alpha > 0$ に対して，$|x| \geq R_0$ で $\frac{1}{1-\alpha} q_0(x) - \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{3} b_k^2(x) \geq -\frac{\text{const}}{|x|^{2+\varepsilon}}$

ならば，L_0は$(-\infty, 0)$に高々有限個の discrete eigenvalue をもつ。

実際(i),(ii)は良く知られており，(iii)は定理1，2を応用することにより得られる。

実際

$$q_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{3} b_k^2(x) + \frac{1}{1+\alpha} q_0(x) & : |x| \leq R_0 \\ -\frac{c}{|x|^2} & : |x| > R_0 \end{cases} \qquad L_1 = -\Delta + q_1(x)$$

$$q_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} q_0(x) - \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{3} b_k^2(x) & : |x| \leq R_0 \\ -\frac{\text{const}}{|x|^{2+\varepsilon}} & : |x| > R_0 \end{cases} \qquad L_2 = -\Delta + q_2(x)$$

とおくと，$L_0 \leq (1+\alpha) L_1$，$L_0 \geq (1-\alpha) L_2$，である。ところで，

$$(H_1 \hat{f})(\xi) = \mathcal{F}(L_1 f)(\xi) = 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{f}(\xi) + \int_{R^3} \hat{q}_1(\xi - \eta) \hat{f}(\eta) d\eta,$$

$$(H_2 \hat{f})(\xi) = \mathcal{F}(L_2 f)(\xi) = 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{f}(\xi) + \int_{R^3} \hat{q}_2(\xi - \eta) \hat{f}(\eta) d\eta$$

である。ここで，$|\xi - \eta| \leq 2$ に対して，

$$\hat{q}_1(\xi - \eta) = -\frac{c\pi}{|\xi - \eta|} + O(1), \quad |\hat{q}_2(\xi - \eta)| \leq \frac{\text{const}}{|\xi - \eta|^{1-\varepsilon}}$$

を得るから，H_1に対しては定理2において，$\nu = 2$，$\beta_i = -1$，$\delta_i = \tilde{\delta}_i = 0$とおいて，条件がみたされており，$H_2$に対しては，$G_0$がHilbert-Schmidt型になることが分かる。よって，求める結果が得られた。

Example 3. $(Hf)(x) = x\cdot f(x) + \int_0^\infty K(x,y)f(y)dy$ で.
$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$, $|K(x,y)| \leq \text{const}\ (1+x+y)^{-\theta}\ (\theta > \frac{1}{2})$, $|K(x,y)| \leq \text{const}\ |y|^{\mu}\ (\mu > 0)\ \ (0 \leq x,\ y \leq 1)$

に対しては. $\sigma_e(H) = [0, \infty)$ で. $(-\infty, 0)$ には. H は高々有限個の離散固有値しかもたない。実際, 定理1の G_0 はこの場合, Hilbert-Schmidt になる。(これは Faddeev [2] の Friedrichs model である。)

Example 4. $(Hf)(x) = |x|^2 f(x) + \int_{R^n} K(x,y)f(y)dy\ \ (n \geqq 3)$ で,
$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$, $|K(x,y)| \leq \text{const}\ (1+|x-y|)^{-n-\varepsilon}\ (\varepsilon > 0)$ に対しては $\sigma_e(H) = [0, \infty)$ で, $(-\infty, 0)$ には高々有限個の discrete eigenvalue しかもたない。実際 G_0 は. Hilbert-Schmidt になるとは限らないが, 完全連続作用素になることを示すことができるからである。(これは. Ushijima [6] が研究した model であるが, 彼は $\sigma_e(H) \cap (-\infty, 0) = \phi$ しか示していない。)

References :

[1] Birman, M. Š ; Mat. Sb. 55 (97) (1961), 125–174.

[2] Faddeev, L. D. ; Trudy. Inst. in. V. A. Steklova. 73 (1964) 292–313.

[3] Friedrichs, K. O. ; Math. Ann. 115 (1938), 249–272.

[4] Kuščer - Corngold : Phys. Rev. 139 (1965). 981–990.

[5] Ukai, S. ; Jour. Nucl. Energy. 19 (1965) 833–848.

[6] Ushijima, T: Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 16, (1966) 127–133)